Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Уральский энергетический институт

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В МАТРИЦЕ СИСТЕМЫ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

THE STABILITY OF LINEAR SYSTEM WITH IMPULSE ACTION IN THE SYSTEMS MATRIX AND DELAY

Желонкина Наталья Игоревна, старший преподаватель каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: 312115@mail.ru, Тел.: +7(906)811-82-72

Natalia I. Zhelonkina, Senior teacher, Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: 312115@mail.ru. Ph.: +7(906)811-82-72

Аннотация: В работе рассматриваются свойства устойчивости и асимптотической устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в матрице системы и запаздыванием. Получены достаточные условия, обеспечивающие устойчивость и асимптотическую решений системы уравнений.

Abstract: The work is devoted to the study of the properties of stability and asymptotic stability of solutions of linear system of differential equations with the generalized effect in the system matrix and delay. Sufficient conditions for stability and asymptotic stability for the systems equations solver were obtained.

***Ключевые слова*:** дифференциальные уравнения; импульсное воздействие; запаздывание; устойчивость; асимптотическая устойчивость.

***Key words*:** differential equations; impulse action; delay; stability; asymptotic stability.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию устойчивости и асимптотической устойчивости для линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы и с запаздыванием. Системы с импульсным воздействием встречаются в технике, биологии [1,2] и экономике [3]. Кроме того, такие процессы могут сопровождаться наличием запаздывания, которые обусловлены различными причинами. Свойства асимптотической устойчивости для систем рассматривались в [4,5]. В данной работе предполагается, что однородная система без импульсов – неустойчива, а свойство устойчивости и асимптотической устойчивости достигается за счет импульсного воздействия. В отличии от [4,5] обобщенное воздействие не содержит регулярной составляющей и является обобщенной производной ступенчатой функции. Особенностью рассматриваемой системы является то, что в правой части имеются некорректные операции умножения разрывной функции на δ– функцию. Под решением понимается, как и в [1,4-7], поточечный предел последовательности гладких решений, порожденных гладкой аппроксимацией обобщенного воздействия, если этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)\dot{\upsilon}_i(t) \right) x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau), \quad (1)$$
$$x(t) = \varphi(t)$$

Здесь $A(t)$, $A_\tau(t)$, $D_j(t)$, $j \in \overline{1,m}$ – непрерывные ограниченные матрицы-функции размерности $n \times n$, $D_j(t)$ – взаимно коммутативны, $\varphi(t)$ – начальная функция, которая является функцией ограниченной вариации, определенная на $[t_0 - \tau, t_0]$, υ_i – компоненты вектор-функции $\upsilon(t) = (\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \ldots, \upsilon_m(t))^T$ – кусочно–постоянные функции, последовательности точек разрыва $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$, удовлетворяющие условию $\lim_{n\to\infty} t_i = \infty$. Функции $\upsilon_i(t)$ – в точках разрыва будем считать непрерывными слева, $\tau > 0$ – постоянное запаздывание.

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau) + \\ +\sum_{j=1}^{m} D_j(t)\cdot x(t)\cdot \Delta\upsilon_j(t_i)\cdot\delta(t-t_i), \quad (2)$$

где $\Delta\upsilon_j(t_i) = \upsilon_j(t_i+0) - \upsilon_j(t_i)$ – скачки кусочно-постоянных функций $\upsilon_i(t)$, $\delta(t-t_i)$ – δ – функция Дирака [1], сосредоточенная в момент t_i.

Как и в [1,4-7], под аппроксимируемыми решениями систем (1), (2) на промежутке $[t_0, \vartheta]$ будем понимать функции ограниченной вариации $x(t)$. Согласно [1,7], при сделанных выше предположениях, на любом конечном интервале $[t_0,\vartheta]$, $(\vartheta > t_0)$ существует аппроксимируемое решение системы (1), удовлетворяющее интегральному уравнению:

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)d\xi + \\ + \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)d\xi + \sum_{t_i<t} S(t_i, x(t_i), \Delta\upsilon(t_i+0)), \quad (3)$$

где

$$S(t,x,\Delta\upsilon) = z(1) - z(0) \quad (4)$$

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} D_j(t)z(\xi)\Delta\upsilon_j(t), \quad z(0) = x \\ \Delta\upsilon(t+0) = \upsilon(t+0) - \upsilon(t). \quad (5)$$

Величина скачка траектории в момент импульсного воздействия, согласно (4), определяется с помощью решения вспомогательного уравнения (5).

Обратим внимание на структуру решения системы (1). На промежутке $[t_0, t_1]$ решения уравнения (1) совпадают с решением уравнения

$$\dot{x} = A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau), \\ x(t) = \varphi(t), t_0 - \tau \le t \le t_0. \quad (6)$$

Будем предполагать, что справедливо

$$\|Y(t,s)\| \le ce^{\alpha(t-s)} \quad (\alpha > 0, c \ge 1), \quad (7)$$

где $Y(t,s)$ – фундаментальная матрица системы(6). Затем вычисляется скачек $S(t_1, x(t_1), \Delta\upsilon(t_1))$ с помощью дифференциального уравнения (5). Значение $z(1)$ дает начальное условие для движения системы (1) на промежутке $(t_1, t_2]$, которое строится с помощью решения уравнения (6) с начальным условием $x(t_1) + S(t_1, x(t_1), \Delta\upsilon(t_1))$ и так далее.

Для исследования свойства устойчивости решения системы (2), построим непрерывную траекторию $x^*(t)$, которая на промежутках $(t_i + i, t_{i+1} + i]$, будет определяться как решение дифференциального уравнения:

$$\dot{x}^*(s) = A(s-i)x^*(s) + A_\tau(s-i)x^*(s-\tau),$$

а на промежутках $[t_i + i - 1, t_i + i]$ как решение дифференциального уравнения (5). В данной работе будем рассматривать ситуацию, когда система (6) является неустойчивой, а свойство устойчивости будет обеспечиваться импульсными составляющими, входящими в систему (2).

Пусть справедливо неравенство

$$\|\tilde{D}_i(s)\| \le be^{\lambda_i s}, \ (b \ge 1, \ \lambda_i < 0), \quad (9)$$

где $\tilde{D}_i(s)$ – нормированная фундаментальная матрица $(D_i(0) = E)$ для системы (5).

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Теорема. Пусть справедливы неравенства (7) и (9). Тогда система (1) устойчивая, если

$$\lim_{i\to\infty}(i\ln c + i\ln b + \sum_{k=1}^{i}\lambda_k + \alpha(t_i - t_0) + \\ + i\ln\left(1 + \sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau\|\right)) = \beta < \infty, \quad (10)$$

и асимптотически устойчивая, если

$$\lim_{i\to\infty}(i\ln c + i\ln b + \sum_{k=1}^{i}\lambda_k + \alpha(t_i - t_0) + \\ + i\ln\left(1 + \sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau\|\right)) = -\infty. \quad (11)$$

Доказательство. Данную задачу мы рассматриваем как систему с переключениями, где в зависимости от интервала активируется соответствующая подсистема. Найдем оценку для решения системы (1). Пусть $x(t)$ – аппроксимируемое решение уравнения (1), порождаемое начальной функцией $\varphi(t)$, заданной на интервале $[t_0-\tau,t_0]$. Тогда аппроксимируемое решение уравнения (1) согласно формуле Коши из [6], будет определяться выражением:

$$x(t)=Y(t,t_0)\cdot\varphi(t_0)+$$
$$+\int_{-\tau}^{0}Y(t,t_0+\tau+s)A_\tau\varphi(s)ds.$$

Тогда, на произвольном промежутке $[t_0,t]$ аппроксимируемое решение будет определяться выражением

$$x(t)=Y(t,t_0)\cdot\varphi(t_0)+$$
$$+\int_{-\tau}^{0}Y(t,t_0+\tau+s)\cdot A_\tau(t_0+\tau+s)\cdot\varphi(s)ds+$$
$$+\sum_{t_i<t}Y(t,t_i)\cdot S(t_i,x(t_i),\Delta\upsilon(t_i)).$$

Вычисляя нормы левой и правой частей, получим

$$\|x(t)\|\le ce^{\alpha(t_{i+1}-t_i)}(1+\sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau(\cdot)\|)\max_{[t_0-\tau,t_0]}\|\varphi(\cdot)\|. \quad (13)$$

Далее, на $[t_1,t_1+1]$, активируется вторая подсистема. Тогда с учетом неравенств (9) и (13), справедлива следующая оценка склеенной траектории

$$\|x^*(t_1+1)\|\le be^{\lambda_1}\|x^*(t_1)\|\le$$
$$\le cbe^{\lambda_1+\alpha(t_1-t_0)}(1+\sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau(\cdot)\|)\max_{[t_0-\tau,t_0]}\|\varphi(\cdot)\|.$$

Аналогично рассмотрим $[t_2+1,t_2+2]$

$$\|x^*(t_2+1)\|\le c^2be^{\lambda_1+\alpha(t_2-t_0)}(1+\sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau(\cdot)\|)^2\times$$
$$\times\max_{[t_0-\tau,t_0]}\|\varphi(\cdot)\|,$$
$$\|x^*(t_2+2)\|\le c^2b^2e^{\lambda_1+\lambda_2+\alpha(t_2-t_0)}\times$$
$$\times(1+\sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau(\cdot)\|)^2\cdot\max_{[t_0-\tau,t_0]}\|\varphi(\cdot)\|.$$

Далее по индукции можно показать, что для отрезка $[t_i+i,t_{i+1}+i]$ справедливо следующее неравенство

$$\|x^*(t_i+i)\|\le c^ib^ie^{\sum_{k=1}^{i}\lambda_k+\alpha(t_i-t_0)}\times$$
$$\times(1+\sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau(\cdot)\|)^i\cdot\max_{[t_0-\tau,t_0]}\|\varphi(\cdot)\|,$$

которое можно записать в виде

$$\|x^*(t_i+i)\|\le\exp(i\ln c+i\ln b+\sum_{k=1}^{i}\lambda_k+$$
$$+\alpha(t_i-t_0)+i\ln(1+\sup_{[t_0,\infty)}\|A_\tau(\cdot)\|))\times\max_{[t_0-\tau,t_0]}\|\varphi(\cdot)\|.$$

Если степень экспоненты есть величина ограниченная, получаем выражение (10) из которого следует, что решение системы (1) будет устойчивым. Если выполняется условие (11), тогда система будет асимптотически устойчивая, что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zavalishin S. T., Sesekin A. N. Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications // Kluwer Academic Publisher, Dorbecht, 1997. P.256.
2. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. // Москва. Физматлит, 2003.
3. Максимов В. П. Позиционное парирование импульсных возмущений в задаче управления линейной системой с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика, 2014. № 2(21). С.6–14.
4. Корнилов И. А., Сесекин А. Н. Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции // Вестник УГТУ-УПИ, 2004. № 3(33). С.386–388.
5. Желонкина Н. И., Сесекин А. Н., Сорокин С. П. Об устойчивости линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы и запаздыванием //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 1. С.40-46.
6. Sesekin A. N., Zhelonkina N. I. On the stability of linear systems with generalized action and delay // IFAC-PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress Milano, Italy, 2011. P.13404-13407, ISSN 1474-6670.
7.Сесекин А. Н. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН., Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 2. С.497-514.
8.Беллман Р., Кук К. Дифференциально – разностные уравнения // М. Наука 1967г. 548 с.